

Kegelschnitte – eine (fast) unendliche Geschichte

HELLMUTH STACHEL (TU WIEN)

Seit mehr als 2300 Jahren werden die Kegelschnitte untersucht, ob nun anhand ihrer Brennpunkteigenschaften, als ebene Schnitte von Kegelflächen, als perspektive Bilder von Kreisen oder als einfachste algebraische Kurven. Aus der Vielzahl ihrer Eigenschaften werden im folgenden einige herausgegriffen, die aus verschiedenen Gründen aktuell sind und auch den Mathematikunterricht bereichern können. Dabei soll die Visualisierung nicht zu kurz kommen: Die meisten Sätze über Kegelschnitte lassen sich bildlich darstellen — ein unverzichtbares Mittel, um Interesse an der Geometrie zu wecken und zu fördern.

1. Historische Bemerkungen

Die Entdeckung der Kegelschnitte ging wahrscheinlich Hand in Hand mit der Beobachtung der *Schattenlinien*, also der von einem Punkt auf eine feste Ebene im Laufe eines Tages geworfenen Schatten. Schon damals wurden die drei verschiedenen Typen der ebenen Schnitte von Drehkegeln unterschieden und deren Standarddefinitionen erkannt (Abb. 1). Apollonius von Perga (ca. 260–190 v. Chr.) führte die heute noch üblichen Bezeichnungen ein. Den wohl elegantesten, aber erst rund 2000 Jahre später gefundenen Beweis für die Brennpunkteigenschaften der ebenen Drehkegelschnitte verdanken wir dem belgischen Mathematiker Germinal Pierre Dandelin (1794–1847).

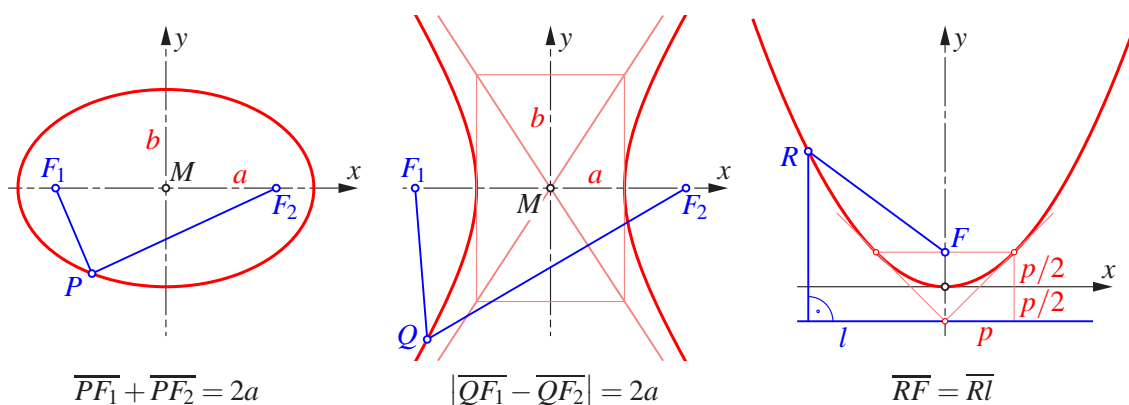


Abb. 1: Standarddefinitionen der Kegelschnitte (Querstriche bezeichnen Distanzen)

Trotz des deutlich verschiedenen Aussehens der drei Kegelschnittsarten zeigte bereits Apollonius in Buch III seiner insgesamt 7 Bücher über die Kegelschnitte, dass alle Typen einheitlich definierbar sind (Abb. 2) und sich nur anhand ihrer Exzentrizität unterscheiden. Dieser *apollonischen Definition* wird das folgende Kapitel 2 gewidmet.

Die fundamentale Rolle der Kegelschnitte als Planetenbahnen wurde von Johannes Kepler (1571–1630) erkannt und in den zu Beginn des 17. Jahrhunderts entstandenen *Keplerschen Gesetzen* dokumentiert. Der rund 50 Jahre später geführte Nachweis Sir Isaac Newtons (1643–1727), dass die Keplerschen Gesetze aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz herleitbar sind, ist wohl einer der bedeutendsten Schritte in der Entwicklung der modernen Naturwissenschaften. Im Kapitel 3 wird daran erinnert, wie dieser Beweis rein synthetisch, also ohne Methoden der Differentialrechnung geführt werden konnte. Eine ähnliche Absicht verfolgte der Nobelpreisträger Richard P. Feynman 1964 in seiner berühmten Vorlesung am California Institute of Technology (siehe Goodstein & Goodstein (1987)).

Der Autor dankt den Kollegen Georg Glaeser und Boris Odehnal von der Universität für Angewandte Kunst für die fruchtbare Zusammenarbeit und die Überlassung so mancher Abbildung.

Einen entscheidenden Schritt vorwärts in der Theorie der Kegelschnitte brachte die Entdeckung der Projektiven Geometrie im 17. und 18. Jahrhundert. Die projektive Ebene stellte sich als die wirkliche Heimat der Kegelschnitte und der damit verknüpften Polaritäten heraus.

Nach der Algebraisierung der Projektiven Geometrie sind die Quadriken nichts anderes als eine Veranschaulichung symmetrischer Matrizen, doch wollen wir nicht diesem abstrakten Standpunkt huldigen. Geometrie ist immer noch etwas ‘zum Anschauen’. Nach Felix Klein (1849–1925) hat unter den Mathematikern der Geometer ‘den Vorteil zu sehen, was er erforscht’, und zweifellos ist dies für Lernende ungemein wichtig.

Kegelschnitte sind weitgehend aus dem Unterricht verschwunden. Das ist bedauerlich, denn wir können heute mit Hilfe von Geometriesoftware oder CA-Systemen diese Kurven mit beliebiger Genauigkeit herstellen und damit die verschiedensten Eigenschaften graphisch verfolgen oder konstruktiv analysieren. Der ‘Schrecken’ des Kurvenzeichnens ist damit weggefallen. Aber das Bild allein macht noch nicht die Geometrie aus, sondern erst die Verknüpfung des Bildes mit logischen Schlussweisen, so dass das Bild letztlich nur als Inspiration fungiert sowie als Kontrolle für unsere Überlegungen. Nur dank der Kenntnis von Kegelschnittseigenschaften können wir beispielsweise verstehen, warum ‘Satellitenschüsseln’ parabolische Meridiane haben oder wie ein Nierensteinzertrümmerer funktioniert.

Wegen eines gebotenen Platzlimits können die in der Folge angesprochenen Themen nicht erschöpfend behandelt werden. Interessierte Leser werden daher auf das demnächst erscheinende Buch Glaeser-Odehnal-Stachel (2015) verwiesen.

2. Die apollonische Kegelschnittsdefinition

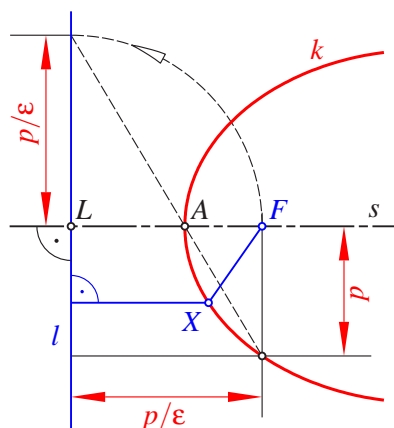


Abb. 2: Apollonische Kegelschnittsdefinition: $\overline{XF} = \varepsilon \cdot \overline{Xl}$

Definition 1 (Apollonische Kegelschnittsdefinition) In einer Ebene π seien ein Punkt F und eine Gerade l bei $F \notin l$ gegeben sowie eine positive reelle Zahl ε . Dann heißt die Punktmenge

$$k = \{ X \mid X \in \pi \text{ und } \overline{XF} = \varepsilon \cdot \overline{Xl} \}$$

Kegelschnitt. F ist ein Brennpunkt und l die zugehörige Leitgerade des Kegelschnitts k . Der Abstand $p := \varepsilon \cdot \overline{Fl}$ heißt Parameter von k ; die Konstante ε ist die numerische Exzentrizität.

Bei $\varepsilon = 1$ heißt k Parabel, bei $0 < \varepsilon < 1$ Ellipse und bei $\varepsilon > 1$ Hyperbel.

Definitionsgemäß ist die Normale s aus dem Brennpunkt F an die Leitgerade l eine Symmetrieachse von k . Sie hat mit k einen zwischen F und l gelegenen Punkt gemein, den Scheitel A . Dessen Konstruktion ist Abb. 2 zu entnehmen.

Die numerische Exzentrizität ε legt die Gestalt des Kegelschnittes bis auf Ähnlichkeiten fest. Der Parameter p fixiert dessen Größe. Wegen $p = \varepsilon \cdot \overline{Fl}$ ist p der Abstand derjenigen Punkte von k , die auf der

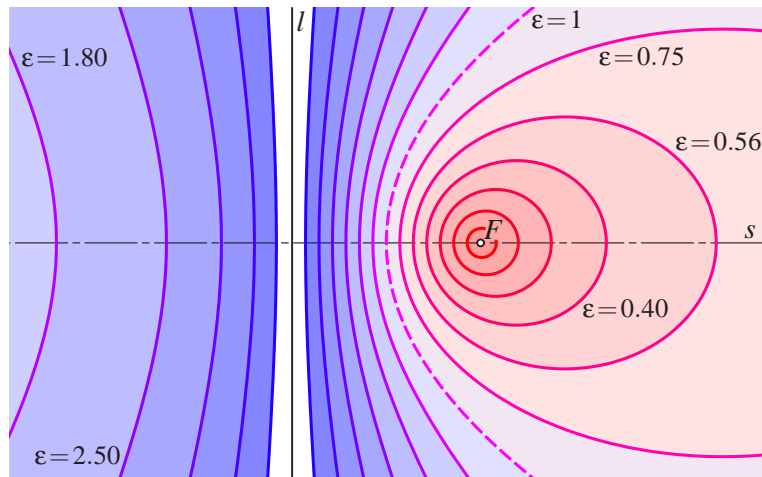


Abb. 3: Kegelschnitte mit gemeinsamem Brennpunkt F und gemeinsamer Leitgerade l

Parallelen zu l durch den Brennpunkt F liegen. Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass der Parameter für alle Kegelschnittstypen einheitlich den Krümmungsradius im Scheitel A angibt.

Lediglich die Kreise werden bei der apollonischen Eigenschaft nicht erfasst, denn für sie wäre $\varepsilon = 0$, und die Leitgerade läge im Unendlichen. Im übrigen gibt es eine Art 'Dandelin-Beweis', mit welchem gemeinsam für alle drei Kegelschnittstypen gezeigt wird, dass die Schnittkurven der Drehkegel mit Ebenen, die nicht durch die Kegelspitze gehen und auch nicht zur Drehachse normal sind, die apollonische Definition erfüllen.

Ausgehend von der apollonischen Kegelschnittsdefinition können wir nun zeigen, dass Ellipsen und Hyperbeln neben s noch eine weitere Symmetrieachse besitzen.

Beweis: Wir verwenden ein kartesisches Koordinatensystem mit s als x -Achse und l als y -Achse (siehe Abb. 4). Dann ist die Bedingung $\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{Pl}$ für $P = (x, y)$ äquivalent zu

$$\left(x^2 - \frac{2p}{\varepsilon}x + \frac{p^2}{\varepsilon^2}\right) + y^2 = \varepsilon^2 x^2.$$

Punkte eines Kegelschnitts erfüllen demnach stets eine quadratische Gleichung. Zu vorgegebenem y folgt das x als Wurzel der bei $\varepsilon \neq 1$ quadratischen Gleichung

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 - \frac{2p}{\varepsilon}x + \left(\frac{p^2}{\varepsilon^2} + y^2\right) = 0. \quad (1)$$

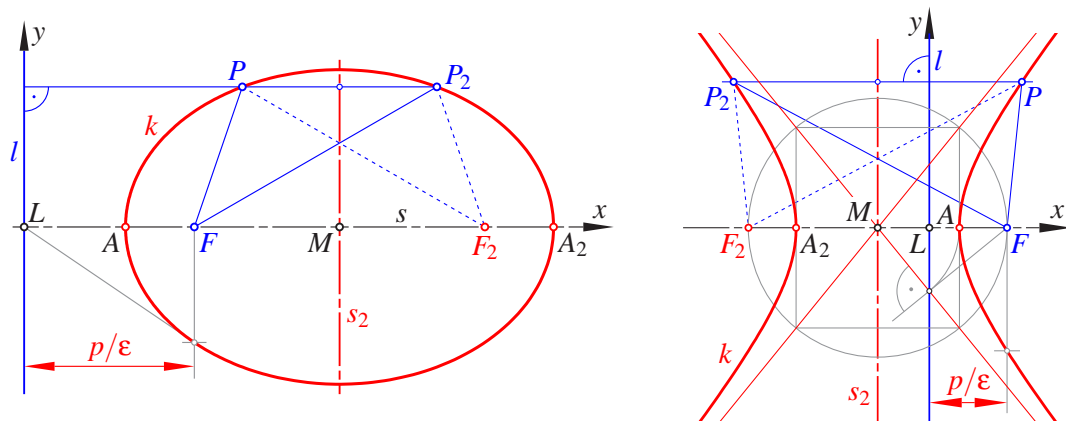


Abb. 4: Kegelschnitte mit $\varepsilon \neq 1$ haben eine zweite Symmetrieachse s_2 und daher auch einen zweiten Brennpunkt F_2

Aus den Koeffizienten dieser Gleichung (1) erkennen wir nach Vieta, dass das arithmetische Mittel der beiden Wurzeln von y unabhängig, also konstant ist. Somit gibt es eine zweite Symmetrieachse, die *Nebenachse* s_2 von k mit der Gleichung

$$s_2: x = x_M := \frac{p}{\varepsilon(1 - \varepsilon^2)}, \quad (2)$$

und somit auch ein Symmetriezentrum, den *Mittelpunkt* $M = (x_M, 0)$.

Durch die Spiegelung an s_2 erhalten wir einen zweiten Brennpunkt F_2 und eine zweite Leitgerade l_2 ; dieselbe Ellipse oder Hyperbel k lässt sich auch durch die Bedingung $\overline{XF_2} = \varepsilon \cdot \overline{Xl_2}$ charakterisieren. \square

Die Abstände der Brennpunkte und Leitgeraden vom Mittelpunkt M lauten

$$\overline{Ml} = |x_M| \quad \text{und} \quad e := \overline{MF} = \left| x_M - \frac{p}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right|. \quad (3)$$

Die Länge e heißt *lineare Exzentrizität* von k .

Für die Punkte P der Ellipse oder Hyperbel k gilt also gleichzeitig $\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{Pl}$ und $\overline{PF_2} = \varepsilon \cdot \overline{Pl_2}$. Ellipsenpunkte liegen stets zwischen den beiden Leitgeraden, woraus die Standarddefinition der Ellipen

$$\overline{PF} + \overline{PF_2} = \varepsilon(\overline{Pl} + \overline{Pl_2}) = \varepsilon \cdot \overline{l_1l_2} = 2\varepsilon x_M = \text{konst.}$$

folgt. Für Hyperbelpunkte, die stets außerhalb des von den zwei Leitgeraden l und l_2 begrenzten Parallelstreifens liegen, folgt analog $|\overline{PF} - \overline{PF_2}| = |2\varepsilon x_M| = \text{konst.}$

Die apollonische Definition des Kegelschnitts k in Definition 1 führt unmittelbar zu dessen Polargleichung $r = f(\varphi)$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass bei der üblichen Darstellung dieser Gleichung im Fall einer Hyperbel der Radius r bei einem Ast negativ wird. Deshalb formulieren wir die Polargleichung auf die folgende Art.

Satz 1 (Polargleichung der Kegelschnitte)

$$P = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in k \iff r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{sofern } 1 + \varepsilon \cos \varphi \neq 0.$$

Beweis: Wir verwenden das in Abb. 5 (linkes Bild) dargestellte Koordinatensystem mit dem Brennpunkt F als Koordinatenursprung. Die x -Achse und somit die Nullrichtung für den Polarwinkel φ weist vom Brennpunkt F zum Scheitel A . Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} r + \varepsilon r \cos \varphi = p &\iff r = \varepsilon \left(\frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi \right) \implies |r| = \varepsilon \left| \frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi \right| \\ &\iff \overline{XF} = \varepsilon \overline{Xl} \text{ mit } F = (0, 0) \text{ und } l: x = \frac{p}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Der obige Folgepfeil ist auch umkehrbar, denn bei

$$r = -\varepsilon \left(\frac{p}{\varepsilon} - r \cos \varphi \right), \text{ also } r = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

ersetzen wir r durch $-r$ und gleichzeitig φ durch $\varphi + \pi$, also $\cos \varphi$ durch $-\cos \varphi$. Dabei bleibt die Punktmenge k unverändert. Aber jetzt erfüllt sie wiederum die Ausgangsgleichung $r + \varepsilon r \cos \varphi = p$. Damit kennzeichnet die oben angegebene Polargleichung die in Definition 1 festgelegte Punktmenge k . \square

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer für alle Kegelschnitte einheitliche Tangentenkonstruktion.¹

¹ Man könnte in Zeiten, wo mit Hilfe von geeigneten Zeichenprogrammen Kegelschnitte fast beliebig genau darstellbar sind, die graphische Konstruktion von Tangenten für überflüssig halten. Warum nicht Tangenten zeichnen, indem man so wie bei Kreisen ein Lineal berührend an die Kurve anlegt? Zweifellos würden wir dann aber nicht begreifen, warum gerade die Kegelschnitte so wichtig sind.

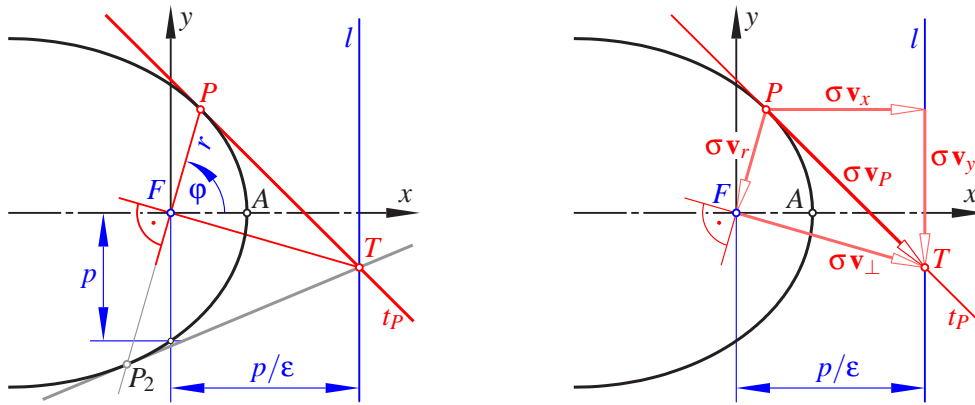


Abb. 5: Das Koordinatensystem für die Polargleichung (links) und Konstruktion des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_P von k im Kurvenpunkt P

Satz 2 (Tangentenkonstruktion der Kegelschnitte)

k sei ein Kegelschnitt mit Brennpunkt F und zugehöriger Leitgerade l . Ist P ein vom Scheitel A verschiedener Punkt von k , so geht die Tangente t_P in P an k durch den Schnittpunkt T der Leitgeraden l mit der durch F gelegten Normalen zur Geraden PF (siehe Abb. 5).

Beweis: Kennen wir von einer ebenen Kurve eine Parameterdarstellung $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, und ist diese differenzierbar, so heißt die Ableitung nach t , also der Vektor $\dot{\mathbf{p}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, *Geschwindigkeitsvektor* $\mathbf{v}(t)$ oder \mathbf{v}_P im Kurvenpunkt P mit dem Ortsvektor $\mathbf{p}(t)$. (Der Buchstabe ‘ \mathbf{v} ’ kommt vom englischen ‘velocity’.) Der Vektor $\mathbf{v}(t)$ hat bei $\|\mathbf{v}(t)\| \neq 0$ die Richtung der Tangente. Seine Länge gibt die augenblickliche Geschwindigkeit an, sofern man t als die Zeit interpretiert. So wie man Straßen mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchfahren kann, ergeben andere Parametrisierungen derselben Kurve andere Geschwindigkeiten, aber immer dieselbe Tangente.

Wir können den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ graphisch durch einen Pfeil entlang der Kurventangente darstellen mit dem Kurvenpunkt als Anfangspunkt. Dabei kann man einen Maßstabsfaktor σ frei wählen, der die Umrechnung der Bahngeschwindigkeit in eine Länge ermöglicht.

Liegt eine Polargleichung $r(\varphi)$ der Kurve vor und ist der Polarwinkel φ als Funktion der Zeit t gegeben, so ist auch $r = r(\varphi(t))$ eine Funktion von t , und der Geschwindigkeitsvektor ist darzustellen als

$$\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \underbrace{(\dot{x}(t), 0)}_{\mathbf{v}_x} + \underbrace{(0, \dot{y}(t))}_{\mathbf{v}_y} = \underbrace{\dot{r}(\cos \varphi, \sin \varphi)}_{\mathbf{v}_r} + \underbrace{r\dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi)}_{\mathbf{v}_\perp}. \quad (4)$$

Der Vektor \mathbf{v}_r hat die Richtung des Ortsvektors \mathbf{p} ; der Vektor \mathbf{v}_\perp ist normal dazu. Die Ableitung $\dot{\varphi}$ des Polarwinkels nach der Zeit ist die *Winkelgeschwindigkeit* des Polstrahls.

Im Fall eines Kegelschnittes mit der Polargleichung aus Satz 1 sind gemäß der apollonischen Definition der Radius r und der Abstand des Kurvenpunktes von der Leitgeraden zueinander proportional. Daher gilt dies auch für die Ableitungen $\dot{r}(t)$ und $\dot{x}(t)$ für jedes $t \in I$. Wir können den Maßstabsfaktor σ derart festsetzen, dass der die Radialkomponente \mathbf{v}_r darstellende Pfeil seine Spitze im Brennpunkt F hat. Dann hat $\sigma \mathbf{v}_x$ seine Spitze auf der Leitgeraden. Die graphische Darstellung der Vektorsumme $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\perp$ ist in Abb. 5 (rechts) gezeigt und ergibt wegen $\sigma \mathbf{v}(t) = \overrightarrow{PT}$ unmittelbar die obige Behauptung. \square

Nun wird die Tangentenkonstruktion aus Satz 2 auf eine Ellipse angewendet, und zwar auf beide Brennpunkte F_1 und F_2 gleichzeitig (siehe Abb. 6, links). Wir bezeichnen den Neigungswinkel der Tangente t_P mit α und deren Schnittpunkt mit der Leitgeraden l_i mit T_i für $i = 1, 2$. Dann erkennen wir, dass der

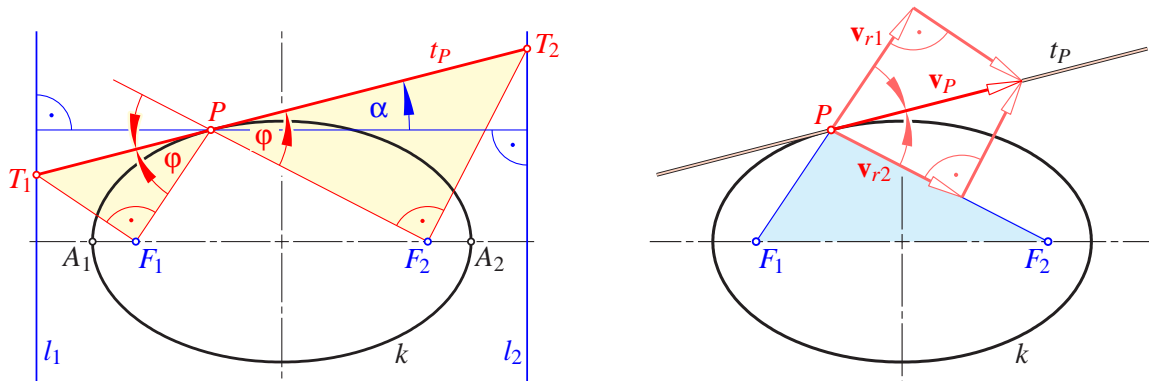


Abb. 6: Die Tangente t_P in P an die Ellipse k halbiert den Außenwinkel im Dreieck F_1PF_2

Winkel $\varphi = \angle F_1PT_1$ kongruent ist zum Winkel $\angle F_2PT_2$, denn nach der apollonischen Definition gilt

$$\cos \varphi = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PT_1}} = \frac{\varepsilon \overline{Pl_1}}{\overline{Pl_1} / \cos \alpha} = \varepsilon \cos \alpha = \frac{\varepsilon \overline{Pl_2}}{\overline{Pl_2} / \cos \alpha} = \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PT_2}}.$$

Wir können diese Winkelgleichheit aber auch beweisen, indem wir wie in Abb. 5 (rechts) den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_P zweifach aus einer radialen Komponente \mathbf{v}_{r_i} und einer dazu normalen Komponente zusammensetzen (Abb. 6, rechts). Als Folge der Standarddefinition der Ellipse muss die Geschwindigkeit, mit welcher die Distanz $\overline{PF_1}$ zunimmt, gleich sein jener, mit welcher die Distanz $\overline{PF_2}$ abnimmt. Damit liegen die zwei Zerlegungen symmetrisch bezüglich der Kurventangente t_P , woraus erneut die behauptete Winkelgleichheit folgt.

Mittels einer analogen Begründung kann man beweisen, dass bei einer Hyperbel die Tangente t_P den Innenwinkel im Dreieck F_1PF_2 halbiert.

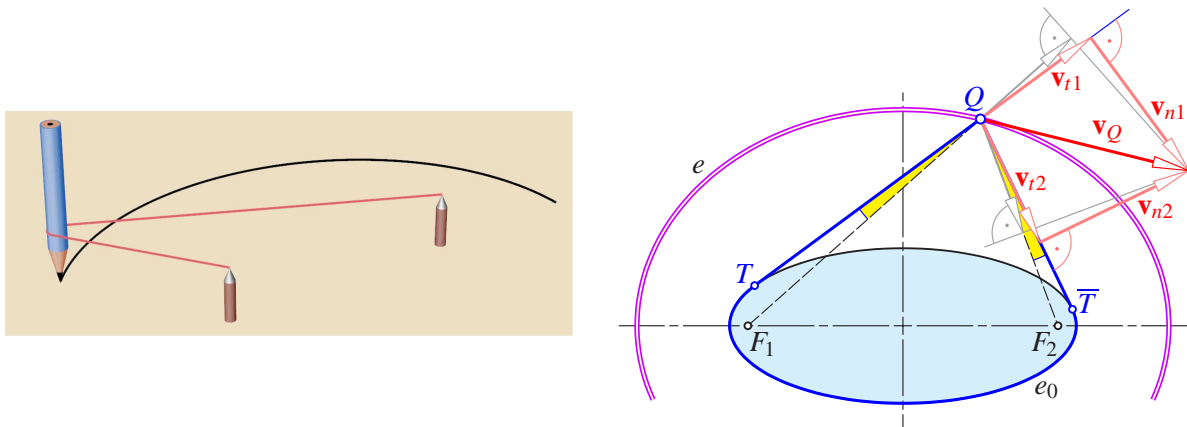


Abb. 7: Die “Gärtnerkonstruktion” einer Ellipse und ihre Verallgemeinerung durch Graves

Auf ähnliche Art lässt sich die von Charles Graves (1812–1899), Bischof von Limerick, stammende Fadenskonstruktion beweisen, mit welcher die “Gärtnerkonstruktion” verallgemeinert wird (Abb. 7): Schlingt man um eine Ellipse e_0 einen Faden und spannt diesen in einem Punkt Q , so bleibt Q auf einer Ellipse e beweglich, welche mit e_0 die Brennpunkte gemein hat.

Zum Beweis stellen wir uns vor, dass der Faden nicht auf e_0 rutschen kann. Dann setzt sich der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_Q von Q hinsichtlich des links bzw. rechts angrenzenden Fadenteils zusammen aus einer tangentialen Komponente \mathbf{v}_{t_i} — entsprechend der Bewegung von Q gegenüber dem Faden — sowie einer dazu normalen Komponente \mathbf{v}_{n_i} für $i = 1$ bzw. 2. Wegen der Konstanz der Fadenlänge sind \mathbf{v}_{t_1} und \mathbf{v}_{t_2} gleich lang, aber einer Längenzunahme auf der linken Seite entspricht eine Abnahme auf der rechten. Wieder zeigt sich die Symmetrie der beiden Zerlegungen bezüglich der vom Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_Q aufgespannten Tangente t_Q .

Nun muss man wissen, dass die Tangenten aus Q an die Ellipse e_0 dieselben Winkelsymmetralen haben wie die Verbindungsgeraden von Q mit den Brennpunkten F_1 und F_2 von e_0 . Somit zeigt die Umkehr der Argumentation von Abb. 6, rechts, dass die Summe der Distanzen $\overline{QF_1}$ und $\overline{QF_2}$ konstant bleiben muss.

3. Kegelschnitte als Planetenbahnen

Durch einmaliges Differenzieren der Parameterdarstellung $\mathbf{p}(t)$, $t \in I$, einer differenzierbaren ebenen Kurve können wir an jeder Stelle den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t)$ berechnen. Dessen Länge entspricht der augenblicklichen Bahngeschwindigkeit $v(t)$, und bei $v \neq 0$ können wir mit Hilfe des *Tangenteneinheitsvektors* \mathbf{t} auch schreiben: $\dot{\mathbf{p}} = v\mathbf{t}$ mit $\|\mathbf{t}\| = 1$. Im folgenden werden wir $\mathbf{v}(t)$ als Ortsvektor einer weiteren Kurve ansehen. Diese heißt *Hodograph* oder auch *Geschwindigkeitsdiagramm* (vgl. Abb. 10).

Die zweite Ableitung $\mathbf{a}(t) := \ddot{\mathbf{p}}(t)$ heißt *Beschleunigungsvektor*. (Der Buchstabe ‘a’ kommt vom englischen ‘acceleration’.) Wir können den Vektor $\mathbf{a}(t)$ für jedes $t \in I$ als Summe zweier Vektoren darstellen, des Vektors \mathbf{a}^t der *Tangentialbeschleunigung* in Richtung der Kurventangente und des dazu orthogonalen *Normalbeschleunigungsvektors* \mathbf{a}^n , also

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{p}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \mathbf{a}^t + \mathbf{a}^n = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt} v\mathbf{t} = \underbrace{\dot{v}\mathbf{t}}_{\mathbf{a}^t} + \underbrace{v\dot{\mathbf{t}}}_{\mathbf{a}^n}. \quad (5)$$

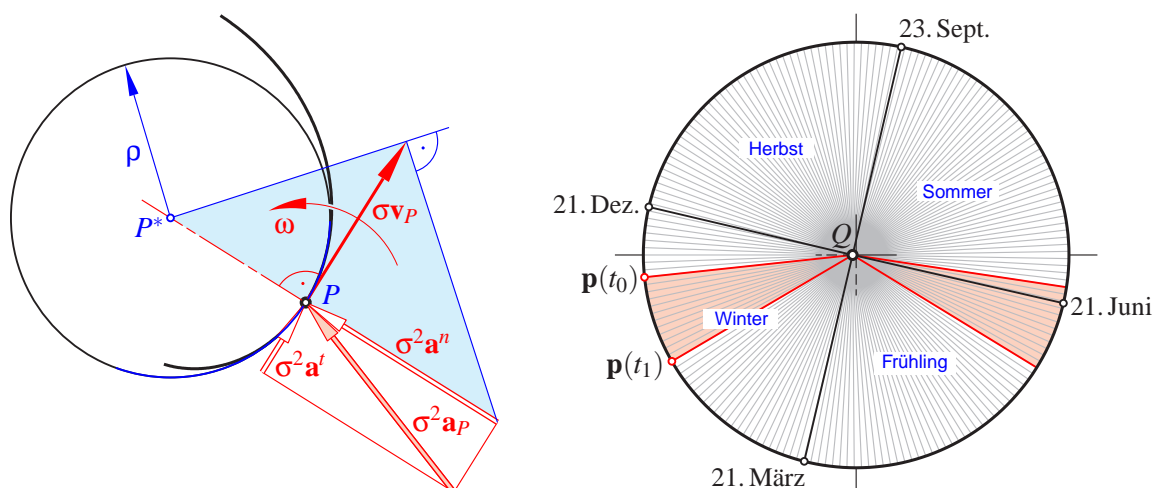


Abb. 8: Links: Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor einer Kurve. Rechts: Die Erde durchläuft ihre Bahn um die Sonne Q mit einer konstanten Flächengeschwindigkeit; die eingezeichneten Teilungsstriche begrenzen Bahnsektoren, welche in jeweils 48 Stunden überstrichen werden und alle denselben Flächeninhalt aufweisen.

Es macht Sinn, die Beschleunigungsvektoren graphisch als Pfeile mit dem Kurvenpunkt P als Endpunkt darzustellen (siehe Abb. 8, linkes Bild). Dies soll daran erinnern, dass die Beschleunigungsvektoren proportional sind zu jener Kraft, welche auf den Kurvenpunkt ausgeübt werden muss, damit dieser die gegebene Kurve beschreibt. Die Normalkomponente \mathbf{a}^n ist für die Abweichung von der geradlinigen Bahn verantwortlich, die Tangentialkomponente für die Geschwindigkeitsänderung. Wenn wir uns erneut die Kurve als Straße vorstellen, die wir gerade durchfahren, so spüren wir die Trägheitskräfte, die den beiden Beschleunigungskomponenten jeweils entgegengesetzt sind. Die zu $-\mathbf{a}^t$ proportionale Kraft drückt uns in die Rückenlehne, wenn die Geschwindigkeit zunimmt. Die dem $-\mathbf{a}^n$ proportionale Zentrifugalkraft drückt uns beim Durchfahren einer Kurve nach außen.

Wegen $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$ können wir Beschleunigungsvektoren auch als Tangentenvektoren des Hodographen interpretieren. Wegen der Normierung von \mathbf{t} ist $\mathbf{t}(t)$ eine Parametrisierung des Einheitskreises mit der Polargleichung $r = 1$ und einem zeitabhängigen Polarwinkel $\varphi(t)$. Also ist die Ableitung $\dot{\mathbf{t}}$ in (5) tatsächlich zu \mathbf{t} orthogonal, was wohl auch durch Differenzieren des konstanten Skalarproduktes $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ gezeigt

werden kann. Bezeichnet $\omega = \dot{\phi}$ die Winkelgeschwindigkeit von \mathbf{t} und \mathbf{v} während des Durchlaufens der Kurve, so hat $\dot{\mathbf{t}}$ die Länge ω (Abb. 8, links). Wir setzen $\dot{\mathbf{t}} = \omega \mathbf{t}^\perp$, wobei \mathbf{t}^\perp durch positive Vierteldrehung aus \mathbf{t} hervorgeht. Wird ein Kreis mit Radius ρ mit der Winkelgeschwindigkeit ω durchfahren, so beträgt die Bahngeschwindigkeit $v = \rho \omega$. Deshalb nennen wir für beliebige Bahnkurven $\rho = v/\omega$ den augenblicklichen Krümmungsradius der Kurve. Man kann zeigen, dass dieser übereinstimmt mit dem Radius desjenigen Kreises, welcher die Kurve im augenblicklichen Bahnpunkt bestmöglich berührt, des *Krümmungskreises* (Abb. 8, links). Damit folgt als Vektor der Normalbeschleunigung

$$\mathbf{a}^n = v \dot{\mathbf{t}} = v \omega \mathbf{t}^\perp = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{t}^\perp. \quad (6)$$

Die Normalbeschleunigung wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und ist umgekehrt proportional zum Krümmungsradius.

Verwenden wir den Maßstabsfaktor σ bei der Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren, so empfiehlt sich der Faktor σ^2 für die Umrechnung zwischen Beschleunigungsvektoren und den darstellenden Pfeilen. Dann zeigt nämlich das schattierte rechtwinkelige Dreieck in Abb. 8 (links) die gegenseitige Abhängigkeit zwischen $\sigma \mathbf{v}$, $\sigma^2 \mathbf{a}$ und dem augenblicklichen *Krümmungsmittelpunkt* P^* , also der Mitte des Krümmungskreises.

Nun zum eigentlichen Thema dieses Abschnittes: Weshalb treten die Kegelschnitte als Planetenbahnen auf?

Johannes Kepler (1571–1630) fand bei der Auswertung der Beobachtungsergebnisse Tycho de Brahes (1546–1601) seine drei bekannten Gesetze. Isaac Newton ging deren Ursachen nach. Das führte ihn 1686 zum **Gravitationsgesetz**: *Zwischen je zwei Massenpunkten P und Q mit den Massen m_1 bzw. m_2 wirkt eine gegenseitige Anziehungskraft \mathbf{F} der Größe*

$$\|\mathbf{F}\| = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ mit } r = \overline{P_1 P_2} \text{ und } \Gamma = 6,67260 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}. \quad \begin{array}{c} \mathbf{F} \quad \mathbf{-F} \\ \circ \quad \quad \quad \circ \\ P \quad \quad \quad Q \end{array}$$

Γ ist die Newtonsche *Gravitationskonstante*. Das Newtonsche Gravitationsgesetz stellt zudem für je zwei Massen mit kugelsymmetrischer Dichteverteilung die auf die Massenmitten wirkende Kraft dar und regelt so nicht nur die Fallgeschwindigkeit auf der Erde, sondern auch die Bahnen der Satelliten oder des Mondes um die Erde sowie jene der Planeten um die Sonne.

Zudem gilt nach der *Grundgleichung der Mechanik* für den Beschleunigungsvektor \mathbf{a}_P der Massenmitte P einer Massenverteilung mit konstanter Gesamtmasse m der **Schwerpunktsatz**:

Für die Bahn von P ist der Vektor $m \mathbf{a}_P$ stets gleich der Summe aller einwirkenden Kräfte.

Wir konzentrieren uns nun auf das sogenannte *Einkörperproblem*, d.h. wir nehmen an, dass auf den Massenpunkt P einzig die Anziehungskraft durch Q wirkt. Zudem stellen wir uns die in Q zentrierte Masse m_2 sehr groß vor im Vergleich zur Masse m_1 von P , so dass Q als ruhender Koordinatenursprung angenommen werden darf.² Dann gilt für den Ortsvektor $\mathbf{p}(t)$ des Punktes P die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{p}} = -\Gamma \frac{m_1}{r^3} \mathbf{p} \quad \text{mit} \quad r = \|\mathbf{p}\|. \quad (7)$$

Wie konnte Newton ohne die heute gängigen Methoden zum Lösen von Differentialgleichungen aus seinem Gravitationsgesetz die nachstehenden Eigenschaften bestätigen?

Satz 3 (Erstes und zweites Keplersches Gesetz):

1. *Wird die Bewegung eines Massenpunktes P allein durch die Anziehungskraft einer sphärischen Masse mit Zentrum Q verursacht, so ist die Bahn von P entweder ein Kegelschnitt mit P als einem Brennpunkt oder geradlinig entlang der Verbindungsgeraden PQ .*

2. *In Zeitabschnitten gleich Dauer überstreicht die Strecke PQ Sektoren gleichen Flächeninhalts, d.h. P bewegt sich um Q mit konstanter Flächengeschwindigkeit.*

² Tatsächlich ruht der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Massen.

Wir präsentieren im folgenden historische ‘geometrische’ Beweise (siehe auch Goodstein & Goodstein (1987)). Dabei gehen wir in zwei Schritten vor, was zugleich einen tieferen Einblick in die Ursachen der Keplerschen Gesetze bietet:

Hilfssatz 4 Wird die Bewegung des Massenpunktes P um den als ruhend angenommenen Massenpunkt Q von einer einzigen Kraft \mathbf{F} verursacht, so gilt:

Die Kraft \mathbf{F} wirkt dann und nur dann entlang der Verbindungsgeraden PQ , wenn die Bahn von P in einer Ebene durch Q liegt und sich P mit konstanter Flächengeschwindigkeit um Q bewegt.

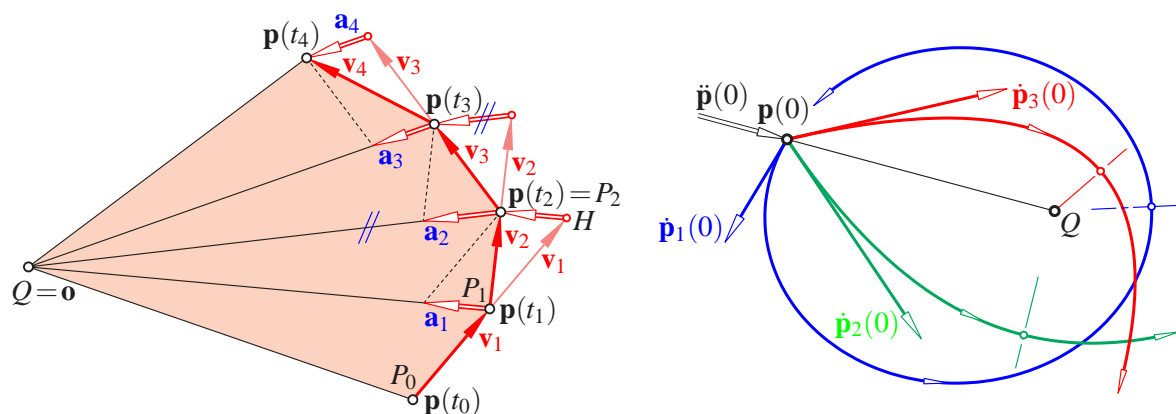


Abb. 9: Links: Newtons Beweis für die Konstanz der Flächengeschwindigkeit. Rechts: Verschiedene Lösungen des Einkörperproblems mit gleichem Anfangspunkt $\mathbf{p}(0)$, aber verschiedenen Anfangs-Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{p}}_i(0)$.

Beweis: Der folgende ‘differenzengeometrische’ Beweis geht auf Newton zurück:

Seien t_0, t_1, \dots, t_n die Teilungspunkte einer gleichförmigen Unterteilung des gegebenen Zeitintervalls, d.h. $t_i - t_{i-1} = h$ und $h = 1$. Dann nähern die Vektoren $\mathbf{v}_i := \mathbf{p}(t_i) - \mathbf{p}(t_{i-1})$ die Geschwindigkeitsvektoren von P an und $\mathbf{a}_i := \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ die Beschleunigungsvektoren in den Positionen $P_i = \mathbf{p}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$ (siehe Abb. 9, links).

Nun sind die Dreiecke QP_0P_1 , QP_1H und QP_1P_2 flächengleich, da sie die Seite QP_1 und die zugehörige Höhe gemein haben. Wäre dagegen der Vektor \mathbf{a}_1 nicht parallel zu QP_1 , so wären die Inhalte der Dreiecke QP_1H und QP_1P_2 verschieden. Dasselbe gilt für die anderen Bahnsegmente.

Wenn die Ortsvektoren zwischen aufeinanderfolgenden Positionen Dreiecke gleichen Flächeninhalts bestimmen, so bedeutet dies nach Verfeinerung der Zeitintervalle im Grenzfall eine konstante Flächengeschwindigkeit. \square

Übrigens wird die doppelte Flächengeschwindigkeit als Betrag des Vektorproduktes $\|\mathbf{p}(t) \times \dot{\mathbf{p}}(t)\|$ definiert. Nach (4) ist $\|\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{p}}\| = r^2|\dot{\phi}|$.

Hilfssatz 5 Angenommen, die in Hilfssatz 4 genannte Kraft \mathbf{F} wirkt stets entlang der Verbindungsgeraden PQ . Dann sind bei nichtverschwindender Flächengeschwindigkeit die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Die Anziehungskraft $\|\mathbf{F}\|$ ist proportional zum Kehrwert der quadrierten Distanz $r = \overline{PQ}$.
2. Der Hodograph der Bahn von P ist ein Kreisbogen.
3. Die Bahn von P ist ein Kegelschnitt mit Q als einem Brennpunkt.

Beweis: Wir präsentieren den von William R. Hamilton (1805–1865) im Jahr 1847 publizierten Beweis, in dem (möglicherweise erstmals) ein Hodograph verwendet wird:

Zu “1 \Leftrightarrow 2”: Die doppelte Flächengeschwindigkeit einer Kurve mit der Polarabstand $r(t)$ und Polarwinkel $\phi(t)$ lautet $C := r^2\dot{\phi}$, und diese ist nach Hilfssatz 5 konstant. Wir setzen die längs der Geraden PQ wirkende Kraft an als $F(r) := \|\ddot{\mathbf{p}}\|$. Dabei ist $\ddot{\mathbf{p}}$ der Tangentenvektor des Hodographen und $\dot{\phi}$ gleich der

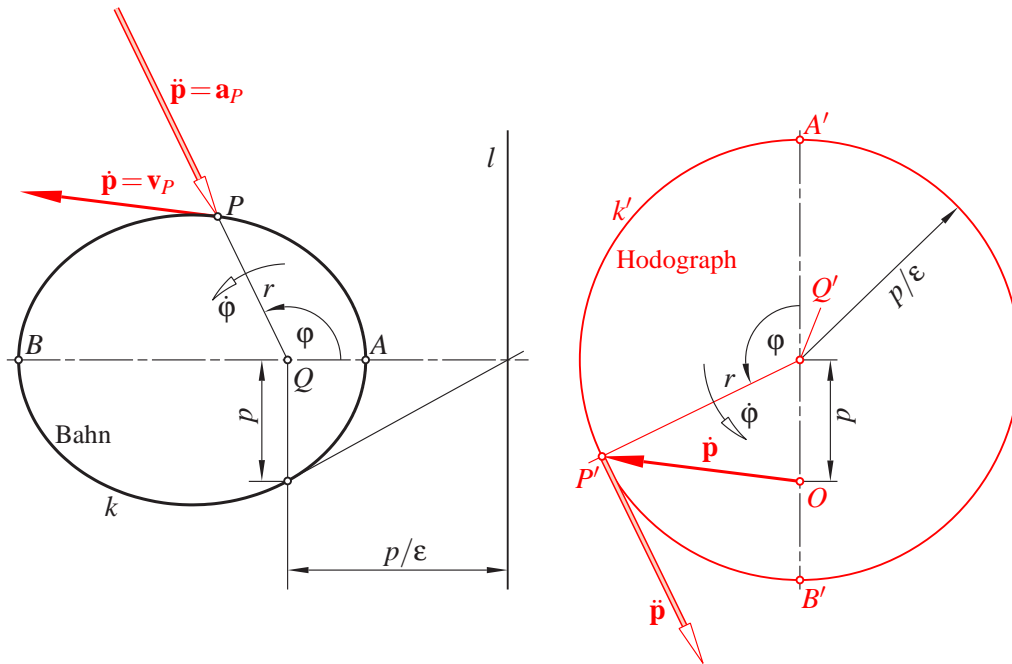


Abb. 10: Durchlaufung einer Ellipse k mit konstanter Flächengeschwindigkeit; der zugehörige Hodograph k' ist ein Kreis.

Winkelgeschwindigkeit ω . Daher lautet der Krümmungsradius ρ_h des Hodographen nach (6)

$$\rho_h = \frac{|v|}{\omega} = \frac{\|\dot{\mathbf{p}}\|}{|\dot{\phi}|} = \frac{F(r)}{|\dot{\phi}|} = \frac{r^2 F(r)}{|C|}. \quad (8)$$

Somit ist ρ_h genau dann konstant, wenn auch $r^2 F(r)$ konstant ist, also die Anziehungskraft umgekehrt proportional ist zu r^2 .

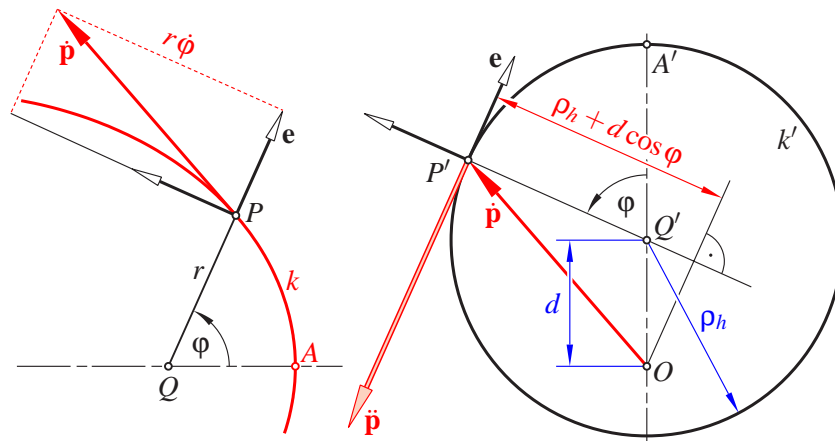


Abb. 11: Ein kreisförmiger Hodograph k' kennzeichnet die Bahn k als Kegelschnitt

Zu “2 \Leftrightarrow 3”: Bei einem Kreisbogen als Hodograph lautet die zum Ortsvektor \mathbf{p} und zum Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{p}}$ orthogonale Komponente von $\dot{\mathbf{p}}$ (siehe Abb. 11) $\rho_h + d \cos \phi = r \dot{\phi} = C/r$. Damit gilt $r = C/(\rho_h + d \cos \phi)$, und dies ist äquivalent zur Polargleichung eines Kegelschnitts gemäß Satz 1. \square

Literatur

- D. L. Goodstein, J. R. Goodstein. *Feynman's lost lecture. The Motion of the Planets Around the Sun*. Vintage Books (ISBN 9780099736219). London (1997).
 Georg Glaeser, Boris Odehnal, Hellmuth Stachel. *The Universe of Conics*. Springer Spektrum. Heidelberg (2015) (in Vorbereitung).